334. 多元環ノIdealノ最小公倍數, 最大公約數, IV.

中　山　　正 (阪大)

§1. マヅ、前稿III, §2ニ証明ナシニ述ベタ主張

「$\mathfrak{o}_0+\mathfrak{o}\geqq\mathfrak{o}_0+\bar{\mathfrak{o}}$ ナラ $\mathfrak{o}_0\frown\mathfrak{o}\leqq\mathfrak{o}_0\frown\bar{\mathfrak{o}}$」ヲ証明スル(逆ハスデニ証明シタ)

ヤハリ im Kleinen デ考ヘテ, III, 補助定理3ニヨリ

$$\mathfrak{o}_0=\sum\varepsilon_{ik}\mathfrak{o}_D,\quad \mathfrak{o}=\sum\varepsilon_{i,k}\mathfrak{o}_D\pi^{\rho_k-\rho_i}$$

トスル。タゞシ $\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots\cdots\leqq\rho_r$.

次ニ $\mathfrak{o}_0$ ヲ左-Ordnung ニ, $\bar{\mathfrak{o}}$ヲ右Ordnung ニモツ樣ナ ganz ナ Ideal (タトヘバ $\mathfrak{o}_0$ ノ $\bar{\mathfrak{o}}$ ニ對スル Distanzideal) ノ一ツヲ $\mathfrak{a}$ トスル. $\mathfrak{a}$ ハトモカク

$$\alpha=\begin{pmatrix}\pi^{\nu_1} & d_{12} & \cdots\cdots & d_{1r}\\ & \pi^{\nu_2} & \cdots\cdots & d_{2r}\\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{\nu_r}\end{pmatrix};\quad \nu_i\geqq 0,\ d_{i,k}\in\mathfrak{o}_D$$

ナル形ノ α デ生ズル $\mathfrak{o}_0$ ノ左 Ideal ニナル、シカシテ $\alpha^{-1}\mathfrak{o}_0\alpha=\bar{\mathfrak{o}}$ デアル。シカルニ α^{-1} ハ

$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}\pi^{-\nu_1} & e_{12} & \cdots\cdots & e_{1r}\\ & \pi^{-\nu_2} & \cdots\cdots & e_{2r}\\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{-\nu_r}\end{pmatrix};\quad e_{i,k}\in D$$

ナル形デアッテ, コヽニスベテノ $i<k$ ニ對シテ

$$(1)\quad 0=\pi^{\nu_i}e_{ik}+d_{i,i+1}e_{i+1,k}+d_{i,i+2}e_{i+2,k}+\cdots\cdots\cdots\cdots+d_{i,k}\pi^{-\nu_k}$$

デアル。而シテ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha$ $(k>i)$ ヲ考ヘルニ, コノ行列

ノ (i,i) ノ所ノ元ハ $e_{ik}\pi^{\nu_i}$ デアル。

然ルニ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha\in\overline{\mathfrak{O}}$, 從ッテ $\in\mathfrak{O}_0+\overline{\mathfrak{O}}$ デアル、ヨッテ $\mathfrak{O}_0+\overline{\mathfrak{O}}\subseteqq\mathfrak{O}_0+\mathfrak{O}$ ナリトスレバ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha\in\mathfrak{O}_0+\mathfrak{O}$. 然ラバ $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}$ ノ形カラ明カナル如クニ $e_{ik}\pi^{\nu_i}$ ガ *ganz* デナケレバナラヌ:

(2) $\quad e_{ik}\pi^{\nu_i}\in\mathfrak{O}_D \qquad (k>i)$

コノ (1) ト (2) カラドノ $i<k$ ニツイテモ $\pi^{\nu_k}\mid d_{ik}$ ナルコトヲ証明シヨウ。ソレニハ先ヅ $k-i=1$, 即チ $k=i+1$ ノ時ニハ (1), (2) ハ $0=\pi^{\nu_i}e_{i,i+1}+d_{i,i+1}\pi^{-\nu_{i+1}}$, 及ビ $e_{i,i+1}\pi^{\nu_i}\in\mathfrak{O}_D$ 即チ $\pi^{\nu_i}e_{i,i+1}\in\mathfrak{O}_D$ トナリ, 從ッテ $d_{i,i+1}\pi^{-\nu_{i+1}}$ ガ *ganz* トナリ主張ガ成リ立ツ. 一般ノ場合ハ $k-i$ ノ大キサニヨル *Induktion* デヤレバ容易ニ証明サレル.

依ッテ $\pi^{\nu_k}\mid d_{ik}$, 從ッテ $\overline{\mathfrak{O}}$ ハ

$$\overline{\mathfrak{O}}=\sum\varepsilon_{ik}\mathfrak{O}_D\pi^{\nu_k-\nu_i}$$

トナル。然ルニ $\overline{\mathfrak{O}}$ モコノ形ニナホサレタ以上ハ考察ハ容易デアッテ直チニ $\mathfrak{O}_0\cap\overline{\mathfrak{O}}\supseteqq\mathfrak{O}_0\cap\mathfrak{O}$ ガ証明サレル.（III §2 ト同様）

§2. 以上デニツノ *Maximalordnung* ノ *Durchschnitt*, *Summe* ノ様子ガ大体ワカッタカラ今度ハニツノ *gleichseitig* ナ（*Normal* ナ）*Ideal* ニ移ラウ。ソレモ III, 補助定理 3 ヲ使ヘバ大シタ困難ハナイ.

タトヘバ

定理　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ヲ二ツノ Maximalordnung トシ、$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_1$ ヲソレゾレ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ任意ノ zweiseitig ノ Ideal トスル。今 $\mathfrak{a}_0$ ト zusammengehörig ナ $\mathfrak{O}_1$ ノ Ideal ヲ $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ ト zusammengehörig ナ $\mathfrak{O}_0$ ノ Ideal ヲ $\mathfrak{b}_0$ トスル、然ラバ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ノ左及ビ右 Ordnung ハソレゾレ $\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{a}_1$ ノ右及ビ左 Ordnung ニ等シイ。

ナドー寸面白ク思ハレル。（コヽニ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ ガ zusammengehörig デアルトハ、左 Ordnung ガ $\mathfrak{O}_0$, 右 Ordnung ガ $\mathfrak{O}_1$ ニナルヤウナ Ideal $\mathfrak{a}_{01}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}_{01}^{-1} \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_{01} = \mathfrak{a}_1$ トナルコトデアル）。

精シク言ヘバ

定理　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_1$ ニ於テ $(\mathfrak{a}_0)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}_0^{\alpha}$, $(\mathfrak{b}_1)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}_1^{\beta}$ トスル．タヾシ $\mathfrak{p}$ ハ Zentrum ノ任意ノ Primideal, $(\mathfrak{a}_0)_{\mathfrak{p}}$ 等ハ $\mathfrak{p}$-Komponent ($\mathfrak{p}$-Grenzmenge), $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ ハ $\mathfrak{p}$ ヲワル $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ素 Ideal トスル。今假リニ $\alpha \geqq \beta$ トナリトスレバ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{p}$-成分ハ $\mathfrak{O}_0 \cap \tilde{\mathfrak{O}}$ ノソレニ等シイ．ココニ $\tilde{\mathfrak{O}}$ トハ $\mathfrak{O}_1$ ノ $\mathfrak{O}_0$ ニ對スル Distanzideal $\mathfrak{d}_{10}$ ト $\mathfrak{P}_0^{\alpha-\beta}$ ノ Durchschnitt ノ左 Ordnung トス。（右 Ordnung ニツイテハ，又ハ $\alpha \leqq \beta$ ノ場合ニハ適當ニ $0, 1, \alpha, \beta$ ヲカヘレバヨイ）。

マタ $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{p}$-成分ハ $\mathfrak{O}_1 \cap \tilde{\tilde{\mathfrak{O}}}$ ノソレ

ニ等シイ、コノニ $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{O}}}$ ハ $\mathfrak{F}_1^{\alpha-\beta} \cap \mathfrak{D}_{10}$ ノ右 Ordnung トス、
（書クトゴタゴタスルが事柄ハ簡単ナコトデアル）

（証明）　ヤハリ im Kleinen デヤル．$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ヲソレゾレ III，補助定理3 ノ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}$ ノ如ク表ハシテオク、シカシテ $\mathfrak{F}_0^t \cap \mathfrak{O}_1$ （$t \geqq 0$）ヲ考ヘル．コレノ左 Ordnung ヲ $\mathfrak{O}_L$（勿論一般ニハ Max-$\mathfrak{O}$ デナイ）トスル、$\mathfrak{O}_L \geqq \mathfrak{O}_0 \cap \mathfrak{O}_1$ ナルコトハ明カダカラ容易ニ $\mathfrak{O}_L$ ハ

$$\mathfrak{O}_L = \sum \varepsilon_{i,k} \mathfrak{O}_D \pi^{a_{ik}}$$

ナル形ニカケル．シカルニ $\mathfrak{O}_L$ ハ $\xi \cdot (\mathfrak{F}_0^t \cap \mathfrak{O}_1) \subseteqq (\mathfrak{F}_0^t \cap \mathfrak{O}_1)$ ナル ξ ノ全体ナルコトヲ考ヘレバ容易ニ

$$a_{ik} = \mathop{Max}_{j}(Max(t, \rho_j - \rho_i) - Max(t, \rho_j - \rho_k))$$

トナル、而シテ $\rho_i' = Min(\rho_r - t, \rho_i)$ トオケバ

$$a_{ik} = Max(0, \rho_k' - \rho_i')$$

トナリ，$\mathfrak{O}_L = \mathfrak{O}_0 \cap \widetilde{\mathfrak{O}}$ トナル、但シ $\widetilde{\mathfrak{O}}$ ハ

$$\widetilde{\mathfrak{O}} = \sum \varepsilon_{ik} \mathfrak{O}_D \pi^{\rho_k' - \rho_i'}$$

ナル Maximalordnung デアル．シカシテコノ $\widetilde{\mathfrak{O}}$ が $\mathfrak{F}_0^t \cap \mathfrak{D}_{10}$ ノ左 Ordnung ニナルノデアル（$\widetilde{\mathfrak{O}}$ ハ其他，$\mathfrak{F}_1^{\rho_r - t} \cap \mathfrak{D}_{01}$ ノ左 Ordnung，又ハ $\mathfrak{F}_0^{\rho_r - t} + \mathfrak{D}_{01}$，$\mathfrak{F}_1^t + \mathfrak{D}_{10}$ ノ右 Ordnung トシテ charakterise スルコトモ出来ル）

一般ノ $\mathfrak{F}_0^\alpha \cap \mathfrak{F}_1^\beta$ ハ容易ニ $\mathfrak{F}_0^{\alpha-\beta} \cap \mathfrak{O}_1$ ノ考察ニ帰セラレル。

Summe ノ方モ大体同様デアル。

兎モ角 $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b}_1$ 等ガ $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal ナルコトハ明カナノダガ，ソノ左，右 Ordnung（両者ハ必ズシモ一致シナイ）ハ上述ノ定理カラワカル如ク一般ニソレヨリモ大キクナル。而シテ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$（又ハ $\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b}_1$）ノ $\mathfrak{z}$成分ガ<u>丁度</u> $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o}_1$ ノソレヲ左及ビ右 Ordnung ニモツ gleichseitig ナ Ideal ニナルノハ，$(\mathfrak{o}_0)_\mathfrak{z}=(\mathfrak{o}_1)_\mathfrak{z}$ ノトキヲ除ケバ $\alpha=\beta$ ノトキ，云ヒカヘレバ $(\mathfrak{a}_0)_\mathfrak{z}$ ト $(\mathfrak{b}_1)_\mathfrak{z}$ ガ zusammengehörig ナルトキニカギル。コノ場合ニ於テ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ガ $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o}_1$ ノ Ideal 論ニ對シテモツ意味ニツイテハ次ノ稿デ考察シタイ。